MINISTÈRES AMÉNAGEMENT DU TERRITOIRE TRANSITION ÉCOLOGIQUE

Liberté
Égalité
Fraternité

2025-ITPE-10 Interne
Epreuve de mathématiques

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT D'INGENIEURS DES TRAVAUX PUBLICS

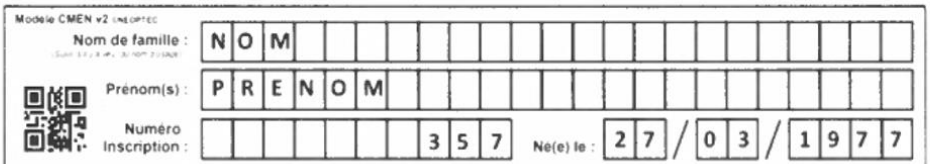
SESSION 2025

Épreuve n° 2 d'admissibilité : Composition de mathématiques			
Durée : 4h	Coefficient : 4	Dossier documentaire : 5 pages	Sujet complet : 6 pages

Composition de mathématiques consistant en la résolution d'une série d'exercices.

Toute note strictement inférieure à 6 sur 20 est éliminatoire.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET



Modèle CMEN v2

Nom de famille :	NOM
Prénom(s) :	PRENOM
Numéro Inscription :	357 — Né(e) le : 27/03/1977

- Le bandeau situé en haut de chacune des feuilles de composition doit être rempli en totalité (**code concours, code épreuve, spécialité, y compris le numéro d'inscription communiqué dans leur convocation**).
- **L'usage de la calculatrice, d'un dictionnaire, de tout autre document est interdit.**
- **Les candidats ne doivent pas faire de marge sur leur copie**.
- **Les copies devront être correctement paginées**. Pagination d'une copie double sur 4 (1/4, 2/4, …), deux copies doubles sur 8 (1/8, 2/8, …), etc.
- **Aucun signe distinctif ne doit apparaître dans la copie** : nom ou nom fictif, signature, paraphe et symboles sont interdits.
- **Seul l'usage d'un stylo à bille noir ou bleu est autorisé (feutre et stylo friction sont interdits). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, pouvant être considérée comme un signe distinctif, est proscrite.**
- **Aucun liquide blanc ni ruban correcteur ne doit être employé** (une telle utilisation empêcherait la correction de la copie). **Toute correction se fait par rature**, de préférence à la règle.
- **Les feuilles de brouillon, ou tout autre document, ne sont pas considérées comme faisant partie de la copie et ne feront pas l'objet d'une correction.** Ils ne doivent pas être joints à la copie.

Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner une sanction par le jury.

Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 – Probabilités

On considère deux urnes notées A et B. L'urne A contient une proportion $p_A \in]0,1[$ de boules blanches. L'urne B contient une proportion $p_B \in]0,1[$ de boules blanches.
À chaque coup, un joueur **qui ne connaît pas** p_A **et** p_B tire avec remise une boule dans l'une des deux urnes. Il adopte la stratégie suivante :

1. Au premier coup, il choisit une des deux urnes de manière équiprobable ;
2. Au n-ième coup ($n \in [\![2,+\infty[\![$), il choisit de tirer dans la même urne qu'au coup précédent, s'il a obtenu une boule blanche dans l'urne où il a tiré au $n-1$ ème coup. Dans le cas contraire, il change d'urne.

Voici un exemple de déroulement du jeu :

1. Coup 1 : choix de l'urne B, une boule blanche est obtenue dans l'urne B. Le joueur tire dans l'urne B au coup 2.
2. Coup 2 : Le joueur n'obtient pas de boule blanche dans l'urne B. Il change d'urne, et tire dans l'urne A au coup 3.
3. Coup 3 : Le joueur obtient une boule blanche dans l'urne A. Il tire au coup suivant dans l'urne A.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On note U_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur tire dans l'urne A et 0 sinon. On note aussi X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur tire une boule blanche au coup i, et 0 sinon.
Le but de l'exercice est de déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = 1)$

1) Dans cette question uniquement, on suppose que $p_A > p_B$, et que cette information est connue du joueur. Dans ce cas, dans quelle urne le joueur a-t-il intérêt à tirer systématiquement ?

2) Donner la loi de U_1, son espérance et sa variance.

3) Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

4) Soit $i \in [\![2,n]\!]$, calculer $\mathrm{P}(X_i = 1 \mid U_i = 1)$ et $\mathrm{P}(X_i = 1 \mid U_i = 0)$

5) Soit $i \in [\![2,n]\!]$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(U_i = 1) = (p_a + p_b - 1)\,\mathrm{P}(U_{i-1} = 1) + (1 - p_b)$$

6) On suppose **dans cette question uniquement** que $p_A + p_B = 1$. Que vaut, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathrm{P}(U_i = 1)$?
Dans la suite de l'exercice, on suppose que

$$p_a + p_b \neq 1$$

7) Résoudre l'équation d'inconnue x :

$$x = (p_a + p_b - 1)x + (1 - p_b)$$

Dans la suite de l'exercice, la solution de cette équation sera notée l.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, on pose :

$$u_n = \mathrm{P}\left(U_n = 1\right)$$

8) Montrer que la suite v_n définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$v_n = u_n - l$$

est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

9) En déduire une expression explicite de u_n et donc de $\mathrm{P}(U_n = 1)$

10) En déduire une expression explicite de $\mathrm{P}(X_n = 1)$

11) Calculer : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n = 1)$

Exercice 2 – Polynômes et algèbre linéaire

Soit n un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré au plus $n - 1$ sur le corps $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ la base canonique de E et $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

Étude d'une application linéaire

Soit P un polynôme de E. On considère l'application u de E dans $\mathbb{C}^n$:

$$u \colon P \mapsto (P(a_1), \cdots, P(a_n))$$

1) Montrer que u est une application linéaire bijective.

Matrice de Vandermonde

2) Montrer que la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la *matrice de Vandermonde*, définie par :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & (a_1)^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & (a_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & (a_n)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

3) Montrer que $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est inversible (on rappelle que les nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont supposés deux à deux distincts).

Polynômes de Lagrange

On étudie ici les *polynômes de Lagrange* définis comme suit : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j}\right).$$

4) Donner une expression explicite des $L_i(X)$, $1 \leq i \leq n$, pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

5) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, quel est le degré du polynôme L_i ?

6) Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

7) Calculer $u(L_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

8) Montrer que la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E, puis écrire la matrice représentative de l'application u dans les bases $(L_1, \ldots, L_n)$ et $\mathcal{B}'$.

9) Soit P un polynôme de E, donner les coordonées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_n)$. En déduire l'expression de la matrice de passage depuis la base $(L_1, \ldots, L_n)$ vers la base $\mathcal{B}$.

10) Calculer $\sum_{i=1}^{n} L_i(X)$

Exercice 3 – Analyse

1) (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

(c) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Le reste de ce problème est consacré au calcul de la valeur de cette somme, d'après une méthode proposée en 2015 par Samuel G. Moreno.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n\colon\ ]0;2\pi[\to \mathbb{R}$, définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers 0.

(b) Montrer que la fonction f_n peut être prolongée en une fonction continue sur tout l'intervalle $[0;2\pi[$. Dans la suite, ce prolongement sera toujours noté f_n.

3) (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0;2\pi[$,

$$f_{n+1}(x) = \cos(x) f_n(x) + \cos(\tfrac{x}{2})\cos\left((n+\tfrac{1}{2})x\right).$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in [0;2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

4) (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (x^2 - 2\pi x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{k^2}.$$

On pourra procéder par intégrations par parties successives.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

4/5

$$\int_0^\pi (x^2 - 2\pi x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{k^2}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0;2\pi[$, on pose :

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 2\pi x}{2\sin(x/2)}.$$

On admet que la fonction φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 2\pi$ et que la fonction ainsi prolongée (que l'on note toujours φ) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;2\pi[$.

(a) Montrer que :

$$\int_0^\pi (x^2 - 2\pi x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi(x)\frac{-\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{n+1/2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{n+1/2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) On admet que, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in [0;\pi]$ tel que :

$$\int_0^\pi \frac{-\cos((n+\frac{1}{2})x)}{n+1/2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})\xi_n\right)}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que :

$$\int_0^\pi (x^2-2\pi x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-2\pi + (2\pi - \frac{\pi^2}{2})\cos((n+\frac{1}{2})\xi_n)}{n+1/2}.$$

(c) Justifier soigneusement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2\pi + (2\pi - \frac{\pi^2}{2})\cos\left((n+\frac{1}{2})\xi_n\right)}{n+1/2} = 0.$$

6) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

FIN DU SUJET