

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

► d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C.)

&

► d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE
(I.C.N.A.)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient 4

ICNA : Coefficient 2

Cette épreuve comporte :

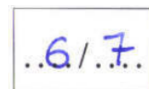
- 1 page de garde (recto)
- 1 page de consignes (recto)
- 3 pages de sujet numérotées de 1 à 3 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée noire.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6^e page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi la page 6 sur 7 :



- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants



Exercice 1

Suite et série de fonctions

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Q1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$? Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$?

Q2. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Q3. Pour $x \in D$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Étudier la parité et la continuité de f .

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Q4. a) Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{1+(k+1)^2x^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+k^2x^2}$ et en déduire un encadrement de $f(x)$ (la réponse fera intervenir la fonction Arctan).

b) Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0^+ .

Q5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

Q6. Pour $\lambda > 0$, calculer $\int_0^\pi e^{-\lambda t} \sin(t) dt$ puis en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} |\sin(t)| dt = \frac{1 + e^{-\lambda\pi}}{1 - e^{-\lambda\pi}} \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin(t) dt = \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

Q7. a) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions.

b) Pour tout $x > 0$, montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} dt$.

Exercice 2

Tirages avec remise

On réalise une suite (infinie) de tirages dans une urne comprenant une boule blanche et six boules rouges. Chaque tirage consiste à prélever une boule et à la remettre ensuite dans l'urne. On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements :

- R_n : « On obtient une boule rouge lors du tirage numéro n ».
- U_n : « On obtient deux boules rouges de suite, pour la première fois, aux tirages de numéros n et $n+1$ ».

On pose $u_n = P(U_n)$.

Q1. Exprimer U_1 , U_2 et U_3 en fonction des évènements R_k pour des valeurs convenables de k . En déduire u_1 , u_2 et u_3 .

Q2. En utilisant la formule des probabilités totales et l'évènement R_1 , montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{1}{7}u_{n+1} + \frac{6}{49}u_n$.

Q3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Q4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Comment interpréter ce résultat ?

Dans la suite de l'exercice, on se propose de retrouver le résultat de la question 3 par une autre méthode. Pour $n \geq 2$, on note X_n et Y_n les évènements définis par :

- X_n : « Les n premiers tirages n'amènent pas deux boules rouges consécutives et le tirage numéro n donne une boule rouge »,

- Y_n : « Les n premiers tirages n'amènent pas deux boules rouges consécutives et le tirage numéro n donne une boule blanche ».

Enfin, on pose $x_n = P(X_n)$ et $y_n = P(Y_n)$.

Q5. Calculer x_2 , y_2 , x_3 et y_3 (les réponses seront justifiées).

Q6. Pour $n \geq 2$, établir une relation simple entre x_n et u_n .

Q7. a) Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1}|X_n)$, c'est-à-dire la probabilité de X_{n+1} sachant X_n . Calculer aussi $P(X_{n+1}|Y_n)$, $P(Y_{n+1}|X_n)$ et $P(Y_{n+1}|Y_n)$.

b) Déterminer des réels positifs p et q tels que $p + q = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $x_{n+1} = py_n$ et $y_{n+1} = q(x_n + y_n)$.

Q8. a) Diagonaliser dans $M_2(\mathbb{R})$ la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Une matrice de passage sera explicitée.

b) Retrouver l'expression de u_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

Exercice 3

Composition de projecteurs orthogonaux

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée et par $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E .

Première partie

Exemple introductif

Dans cette partie uniquement, $n = 4$ et donc $E = \mathbb{R}^4$.

Q1. Soit p l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un projecteur puis déterminer ses espaces caractéristiques. En déduire qu'il s'agit d'un projecteur orthogonal.

Q2. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y - t = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base. Déterminer une base de $H^\perp$.

b) Écrire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale q sur H .

Q3. a) Reconnaître l'endomorphisme $p \circ q$, déterminer son noyau et son image.

b) Exprimer $\text{Im}(p \circ q)$ en fonction de $\text{Im}(p)$ et de $\text{Im}(q)$ puis $\text{Ker}(p \circ q)$ en fonction de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(q)$.

Deuxième partie

Composée de projecteurs orthogonaux

On revient au cas général où $n \geq 2$.

Q4. Soit p un projecteur de E .

a) Montrer que $\text{Im}(p) = \{u \in E : p(u) = u\}$ et $\text{Ker}(p) = \{u - p(u) ; u \in E\}$.

b) On suppose que p est un projecteur orthogonal de E . Pour $u \in E$, montrer que $\|p(u)\| \leq \|u\|$ et qu'il y a égalité si, et seulement si, $u \in \text{Im}(p)$.

Q5. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E tels que $p \circ q$ soit un projecteur.

a) Soit $u \in \text{Im}(p \circ q)$. Montrer que $u \in \text{Im}(p)$ et que $q(u) - u \in \text{Im}(p)^\perp$. En déduire que $q(u) = u$.

b) Établir que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

Q6. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

a) Montrer que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$.

b) En déduire que $p \circ q$ est la projection orthogonale sur $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

