

Epreuve de sciences physiques

Durée : 4 heures

Le sujet comporte 5 pages

Le candidat doit prendre soin de vérifier l'intégrité du sujet.

Nous attirons l'attention du candidat sur la nécessaire clarté de la rédaction.

L'ensemble des données et les aides au calcul se trouvent à la fin du sujet.

L'usage de machine à calculer et autre appareil de communication est interdit. Les calculs sont faits en ordre de grandeur.

La dérivée temporelle d'une grandeur est notée avec un point comme suit : $\frac{dH}{dt} = \dot{H}$

Préambule

« *Il est impossible d'exagérer l'importance des phénomènes périodiques dans la nature.* »

— Henri Poincaré



FIGURE 1 – Henri Poincaré

Les phénomènes périodiques occupent une place centrale dans l'édifice de la physique. Les oscillateurs constituent un modèle universel permettant de décrire une grande variété de systèmes : pendule simple, vibrations mécaniques, circuits électriques oscillants, propagation d'ondes.

Les premières observations quantitatives des oscillations remontent aux travaux de Galilée sur le pendule. Au XVII^e siècle, Huygens formalise mathématiquement ce mouvement et met en évidence le rôle des approximations linéaires. Au XIX^e siècle, les travaux de Maxwell révèlent l'analogie profonde entre oscillateurs mécaniques et électriques.

Le présent problème propose l'étude progressive d'un système oscillant à une dimension. On s'intéressera successivement :

- à l'analyse énergétique d'un potentiel non linéaire,
- aux petites oscillations autour d'un équilibre stable,
- à l'étude énergétique du système,
- à l'introduction d'un amortissement et d'un forçage harmonique,
- à un système couplé,
- puis à l'analogie avec un circuit électrique RLC.

Oscillations mécaniques et analogie électrique

On considère un point matériel de masse m , se déplaçant sur un axe horizontal (Ox) . Il est soumis à un potentiel :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}ax^3 \quad (1)$$

où $k > 0$ et $a > 0$ sont des constantes.

Partie I – Étude énergétique d'un potentiel non linéaire

1. Définir ce qu'est un référentiel galiléen.
2. Dans ce cadre, démontrer le théorème de l'énergie mécanique en introduisant toutes les grandeurs et notations utiles.
3. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}_p$ exercée sur la masse.
4. Etablir les dimensions respectives des constantes k et a .
5. Définir et déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
6. Tracer qualitativement l'allure du potentiel.
7. Que pouvez-vous dire du sens physique de chacun des termes du potentiel $E_p(x)$?
8. Déterminer quantitativement l'énergie minimale permettant au mobile d'échapper vers $x \rightarrow +\infty$.
9. Discuter la nature des mouvements possibles selon l'énergie mécanique.

Partie II – Approximation harmonique

On se place au voisinage de l'équilibre stable.

10. Identifier chacun des termes de la force $\vec{F}_p$ et leur donner un sens physique.
11. Linéariser la force au premier ordre en x .
12. Établir l'équation différentielle du mouvement par une application rigoureuse du Principe Fondamental de la Dynamique.
13. Déterminer la pulsation propre et la période des petites oscillations.
14. Discuter qualitativement l'influence du terme non linéaire pour des amplitudes finies, des comparaisons avec des systèmes connus sont les bienvenues.

Partie III – Étude énergétique

Dans cette partie nous nous placerons dans l'hypothèse des petits frottements. Pour cela on ajoute un frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

15. Établir l'expression de l'énergie mécanique du système.
16. Montrer que le système est dissipatif en présence de frottements.
17. Etablir l'expression de $x(t)$ la position du point matériel en fonction du temps si les conditions initiales sont :

$$x(o) = X_o \quad (2)$$

$$\dot{x}(o) = 0 \quad (3)$$

18. Etablir, dans l'hypothèse de petits frottements, les équations paramétriques du portrait de phase du système.
19. Proposer une représentation graphique et une analyse de la forme de ce dernier.

On définit le décrétement logarithmique comme suit :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \quad (4)$$

T est la période (ou pseudo-période) du système.

20. Déterminer l'expression de δ et lier cette grandeur au portrait de phase.

Partie IV – Oscillateur amorti et forcé

Un oscillateur bien que dans un champ de potentiel E_p peut être influencé par l'extérieur de différentes manières : par une action d'amortissement comme en partie III, par une injection d'énergie via une force excitatrice :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (5)$$

21. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel de masse m .
22. Mettre l'équation sous forme normalisée et introduire le facteur de qualité Q .
23. Établir la dimension et le sens physique de chacun des termes de l'équation différentielle.
24. Montrer que le facteur de qualité Q est un rapport de temps caractéristique τ_1 et τ_2 dont on donnera la signification physique.
25. A l'aide de la question précédente, donner un sens physique à Q le facteur de qualité du système.
26. Déterminer l'amplitude $X(\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$ en régime forcé sinusoïdal.
27. Tracer l'allure de l'amplitude $X(\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$.
28. Déterminer la condition de résonance et commenter le rôle de l'amortissement.

Partie V – Pendule couplé

On fixe sous le mobile un pendule simple de longueur L et de masse m_2 . On note θ son angle avec la verticale défini par la gravité. Nous utiliserons deux référentiels :

- $\mathcal{R}_1$: le référentiel du laboratoire supposé galiléen dans lequel un repère d'espace (O', x', y') est défini.
- $\mathcal{R}_2$: le référentiel du point mobile dans lequel un repère d'espace (O, x, y) est défini.

La situation est schématisée en figure 2 de la page 5.

29. Etablir l'expression de la position de la masse du pendule simple dans $\mathcal{R}_1$.
30. Etablir l'accélération $\vec{a}_{/R_1}(m_2)$ en fonction de celle du mobile $\vec{a}_{/R_1}(m)$ et $\vec{a}_{/R_2}(m_2)$ l'accélération de m_2 dans le référentiel du pendule $\mathcal{R}_2$.
31. Interpréter le terme dû à l'accélération du support.

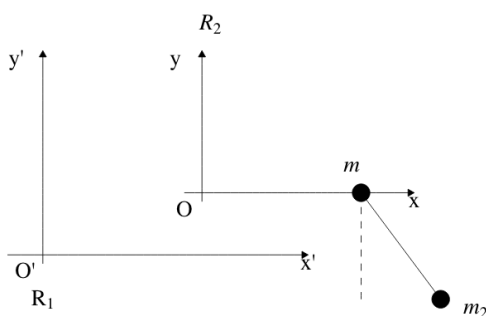


FIGURE 2 – Couplage mécanique

32. Établir l'équation du mouvement du pendule pour les petites oscillations dans le référentiel $\mathcal{R}_1$.
33. Montrer qu'il est possible d'obtenir l'équation du mouvement dans le référentiel du pendule $\mathcal{R}_2$.
34. Discuter qualitativement les phénomènes de couplage possibles.

Partie VI – Analogie électromécanique

On considère un circuit RLC série soumis à une tension $V(t)$.

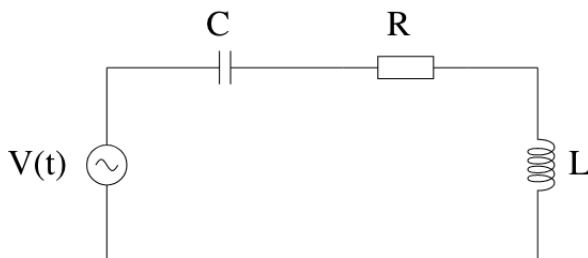


FIGURE 3 – Circuit RLC

35. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur C.
36. Établir les correspondances entre grandeurs mécaniques et électriques.
37. Comparer les phénomènes de résonances mécanique et électrique.
38. Conclure sur l'universalité des oscillateurs linéaires du second ordre.

FIN