



CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT
D'INGENIEURS DES TRAVAUX PUBLICS
SESSION 2026

Épreuve n° 2 d'admissibilité : Composition de mathématiques			
Durée : 4h	Coefficient : 4	Dossier documentaire : 4 pages	Sujet complet : 5 pages

Composition de mathématiques consistant en la résolution d'une série d'exercices.

Toute note strictement inférieure à 5 sur 20 peut être éliminatoire.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET

Modèle CMEN v2 (NEOPTIC)

Nom de famille : N O M

Prénom(s) : P R E N O M

Numéro d'inscription : 3 5 7

Né(e) le : 2 7 / 0 3 / 1 9 7 7

- Le bandeau situé en haut de chacune des feuilles de composition doit être rempli en totalité (**code concours, code épreuve, spécialité, y compris le numéro d'inscription communiqué dans leur convocation**).
- L'usage de la calculatrice, d'un dictionnaire, de tout autre document est interdit.
- Les candidats ne doivent pas faire de marge sur leur copie.
- Les copies devront être correctement paginées. Pagination d'une copie double sur 4 (1/4, 2/4, ...), deux copies doubles sur 8 (1/8, 2/8, ...), etc.
- Aucun signe distinctif ne doit apparaître dans la copie : nom ou nom fictif, signature, paraphe et symboles sont interdits.
- Seul l'usage d'un stylo à bille noir ou bleu est autorisé (feutre et stylo friction sont interdits). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, pouvant être considérée comme un signe distinctif, est proscrite.
- Aucun liquide blanc ni ruban correcteur ne doit être employé (une telle utilisation empêcherait la correction de la copie). Toute correction se fait par rature, de préférence à la règle.
- Les feuilles de brouillon, ou tout autre document, ne sont pas considérées comme faisant partie de la copie et ne feront pas l'objet d'une correction. Ils ne doivent pas être joints à la copie.

Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner une sanction par le jury.

Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 – Probabilités

L'objet du problème est l'étude de variables aléatoires modélisant l'évolution de la valeur prise par des actifs à chaque période de temps t , avec $t \in \mathbb{N}$.

Etude de l'évolution de la valeur d'un actif A. On considère un actif A dont la valeur est modélisée par une variable aléatoire S_t . À la période de temps $t \in \mathbb{N}$, S_t est la variable aléatoire donnant la valeur de l'actif au temps t . On suppose que $S_0 = 0$ presque sûrement. Ensuite, à chaque période de temps t , la valeur de l'actif augmente de 1 avec une probabilité de $0 < p < 1$, et diminue de 1 avec une probabilité $1 - p$.

On note Z_t la variable aléatoire définie comme suit :

$$\mathbb{P}(Z_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_t = -1) = 1 - p.$$

- 1) On pose $U_t = \frac{1}{2}(Z_t + 1)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire U_t . Déterminer son espérance et sa variance.
- 2) Expliquer pourquoi :

$$S_t = \sum_{k=1}^t U_k$$

- 3) Exprimer S_t en fonction de U_t et plus de Z_t .

On cherche la probabilité que l'actif prenne une valeur nulle, c'est-à-dire la probabilité $\mathbb{P}(S_t = 0)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

- 4) Si t est impair, que vaut $\mathbb{P}(S_t = 0)$?
- 5) Si t est pair, montrer que $\mathbb{P}(S_t = 0) = \binom{t}{t/2} (p(1-p))^{t/2}$.

On rappelle la formule de Stirling pour $n \in \mathbb{N}$:

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

- 6) On pose $u_{2t} = \mathbb{P}(S_{2t} = 0)$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} u_{2t}$.

Dans les parties suivantes, on fixe $r \in]0, 1[$.

Introduction d'un second actif B indépendant du premier actif A. On introduit maintenant un second actif B dont la valeur est modélisée par une variable aléatoire C_t . Au temps 0, $C_0 = 0$.

On suppose que cet actif évolue, indépendamment de S_t à chaque période $t \in \mathbb{N}$ comme suit : C_t augmente de r avec probabilité $1 - p$, et diminue de r avec probabilité p .

On note W_t une variable aléatoire indépendante de Z_t (définie à la partie 1) définie comme suit :

$$\mathbb{P}(W_t = r) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(W_t = -r) = p.$$

- 7) À chaque période t , déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_t + W_t$, son espérance et sa variance.
- 8) Exprimer $S_t + C_t$ en fonction de Z_t et W_t .
- 9) Calculer $\text{Var}(S_t)$, $\text{Var}(S_t + C_t)$. Comparer $\text{Var}(S_t)$ et $\text{Var}(S_t + C_t)$.

Introduction d'un actif D dépendant de A. On introduit une variable aléatoire $\xi_t = -rZ_t$ (où Z_t est la variable aléatoire définie à la question 1). On introduit alors un actif D dont la valeur est modélisée par une variable aléatoire notée K_t définie comme suit :

$$\begin{cases} K_0 = 0, \\ K_t = \sum_{k=1}^t \xi_k \quad \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

- 10) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_t + \xi_t$, son espérance et sa variance.
- 11) Calculer $\text{Var}(K_t)$ et $\text{Var}(S_t + K_t)$. Comparer $\text{Var}(S_t + K_t)$ et $\text{Var}(S_t + C_t)$ (avec C_t l'actif défini au paragraphe précédent).

Exercice 2 – Algèbre linéaire

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que, si f est un endomorphisme de E et p un entier naturel, on note :

$$f^p = \underbrace{p \circ p \circ \cdots \circ p}_{p \text{ fois}},$$

avec la convention $f^0 = \text{id}_E$.

Définition. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On appelle *indice de nilpotence* de f le plus petit entier p vérifiant cette propriété.

1. Etude d'un cas particulier dans $\mathbb{K}^4$ On considère $E = \mathbb{K}^4$ et l'application

$$\varphi : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (0, x, y, z).$$

- 12) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- 13) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E .
- 14) Déterminer une base de $\ker \varphi$ et une base de $\text{Im } \varphi$.
- 15) Montrer que φ est nilpotent d'indice 4.
- 16) Donner un vecteur a de $\mathbb{K}^4$ tel que : $\varphi^3(a) \neq 0$.
- 17) Montrer que la famille $\{a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a)\}$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

2. Etude d'un cas particulier dans $\mathbb{K}_2[X]$ On considère $E = \mathbb{K}_2[X]$ et l'application

$$\Delta : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

- 18) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
- 19) Étudier le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .
- 20) Déterminer $\ker \Delta$ et $\text{Im } \Delta$.
- 21) Montrer que Δ est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

3. Commutant d'un endomorphisme nilpotent On se place désormais dans $E = \mathbb{K}^n$, et on considère un endomorphisme nilpotent f d'indice p .

On définit comme suit le commutant de f $\mathcal{C}(f)$:

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

- 22) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.
- 23) Montrer que la famille $\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$ est libre.
- 24) Est-il possible que $p > n$?
- 25) Montrer que la famille $\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$ est une base de E .
- 26) Soit $h \in \mathcal{C}(f)$, écrire la matrice de u dans la base $\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$.
- 27) On se place dans $\mathcal{L}(E)$, quelle est la dimension de $\mathcal{C}(f)$?

Exercice 3 – Analyse

Dans ce problème, on s'intéresse sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ à l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

où r et K sont deux paramètres constants strictement positifs.

On considère y une solution de E ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

- 28) Exprimer y' en fonction de z' et z .
- 29) En déduire que z est solution de l'équation différentielle :

$$(\tilde{E}): \quad z' = -r \left(z - \frac{1}{K}\right).$$

- 30) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\tilde{E})$.
- 31) Trouver une solution particulière constante de $(\tilde{E})$; en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 0$,

$$z(t) = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}.$$

- 32) Dédire des questions précédentes que, pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right) e^{-rt}},$$

où $y_0 = y(0)$ désigne la valeur de la fonction y à l'instant initial $t = 0$.

- 33) Étudier les variations de y (on pourra distinguer les cas $y_0 > 0$ et $y_0 < 0$) et déterminer sa limite en $+\infty$.
- 34) L'équation (E) est utilisée dans certains modèles de dynamique des populations pour modéliser l'évolution du nombre d'individus d'une espèce animale ou végétale au cours du temps. Dans ce contexte, le paramètre K est parfois appelé *capacité de support de l'environnement*. Commenter cette appellation.
- 35) Donner un équivalent de $y(t) - K$ lorsque t tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = y(n) - K$.

FIN DU SUJET