MINISTÈRES
TRANSITION ÉCOLOGIQUE
COHÉSION DES TERRITOIRES
MER

Liberté
Égalité
Fraternité

CONCOURS INTERNE
D'INGÉNIEUR DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT
SESSION 2021

ÉPREUVE N°2
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit durant l'épreuve

Avertissement :
La qualité de la rédaction, le soin, l'orthographe, la clarté des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les éventuelles tentatives infructueuses devront être clairement barrées.

Les résultats devront être mis en évidence, en les soulignant ou en les encadrant à la fin de chaque question, en guise de conclusion.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension égale à 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I – Quelques propriétés de f

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 2A$.
En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que leur dimension.

3. On note E_1 l'ensemble des vecteurs de E invariants par f, c'est-à-dire :

$$E_1 = \{u \in E, \quad f(u) = u\}.$$

Déterminer E_1, donner une base $\mathcal{B}_1$ de E_1.

Partie II – Un endomorphisme auxiliaire

On considère l'endomorphisme g de E défini pour tout $u \in E$ par

$$g(u) = f \circ f(u) - f(u) + u.$$

On note E_2 le noyau de g.

4. a. Soit u un vecteur de E tel que $f(u) = u$. Démontrer que $g(u) = u$.

b. En déduire que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

5. a. Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.

b. En déduire que, si u appartient à E_2 alors $f(u)$ appartient aussi à E_2.

6. Soit $v = e_1 + e_2$. Vérifier que $v \in E_2$.

7. a. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de E_2.

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ formée par les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

c. Déterminer la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}'$.

d. Justifier que g est une projection dont on explicitera les éléments caractéristiques.

8. Expliciter la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

9. Déterminer la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est le calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$

1. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad \forall t>0, \quad f(t)=t-1-\ln t$

a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

2. Calcul d'intégrale.

a. Soit x un réel de $]0;1[$. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

b. Pour $x\in]0;1[$, expliciter $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ puis montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

3. Calcul et encadrement d'une somme

Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

b. En déduire l'égalité suivante : $\quad \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{n+1}{2n}-1-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

c. Soit k un entier tel que $2\leqslant k\leqslant n$.

En utilisant la monotonie de f sur $]0;1]$, démontrer que : $\quad \forall t\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right], \quad f\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant f(t)$.

Puis en déduire que : $\quad \displaystyle\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t$.

d. Déduire du résultat précédent l'inégalité suivante : $\quad \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

e. Établir que : $\quad \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

f. En déduire l'encadrement : $\quad \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Conclusion

a. Déduire du dernier encadrement le résultat suivant : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

b. À l'aide de l'égalité établie en **3.b.**, déterminer la valeur de la limite : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

Exercice 3

La probabilité d'un événement A est notée $\mathbb{P}(A)$, et pour tout événement B vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce non truquée. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. On lance ensuite la pièce autant de fois que l'on a obtenu de « 6 » au cours des N lancers du dé. Autrement dit, si n désigne le nombre de « 6 » obtenus au cours des N lancers du dé, on lance n fois la pièce.

On définit alors les trois variables X, Y et Z par :

- Z désigne le nombre de « 6 » obtenus au cours des N lancers du dé.
- X désigne le nombre de « piles » obtenus lors de tous les lancers de la pièce.
- Y désigne le nombre de « faces » obtenus lors de tous les lancers de la pièce.

1. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Déterminer une relation entre X, Y et Z.

3. Soient k et n deux entiers tous les deux inférieurs ou égaux à N.

  a. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{[Z=n]}(X = k)$ si $k > n$ et expliquer pourquoi en une phrase.

  b. Expliquer pourquoi $\quad \mathbb{P}_{[Z=n]}(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si $k \leq n$.

4. Soient k et n deux entiers tous les deux inférieurs ou égaux à N.

  a. Donner la valeur de $\mathbb{P}\Big((Z = n) \cap (X = k)\Big)$ si $k > n$.

  b. Montrer que si $0 \leq k \leq n \leq N$, alors $: P\Big((Z = n) \cap (X = k)\Big) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} \dfrac{5^{N-n}}{2^n \times 6^N}$.

5. **a.** Montrer que les événements $(Z = 0), (Z = 1), \ldots, (Z = N)$ forment un système complet d'événements.

  b. Écrire la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ en utilisant le système complet de la question précédente.

  c. En déduire que $\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^N \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

  d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$ sous la forme $\left(\frac{a}{b}\right)^N$ où on donnera les valeurs de a et b.

6. Déterminer $\mathbb{P}(X = N)$.

7. Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, expliciter la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$. On laissera sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer mais qu'on simplifiera au maximum.

8. Justifier que X et Y ont la même loi.

9. Déterminer l'espérance de Y. Pour cela on pourra utiliser la question **2.**.