Épreuve de mathématiques

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans tout l'exercice $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M la matrice : $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

On cherche à expliciter les puissances entières de la matrice M selon différentes méthodes.

On rappelle la convention : $\forall B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \quad B^0 = I$.

1. Introduction d'une suite auxiliaire

- **a.** Calculer $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$
- **b.** Calculer A^2 et expliciter A^2 en fonction de A.
- **c.** Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I + u_n A$. On pourra raisonner par récurrence.
- **d.** Calculer u_n en fonction de n.
- **e.** En déduire l'expression de M^n.

2. Utilisation de la formule du binôme

Soit J la matrice définie par : $\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- **a.** Calculer J^2.
- **b.** En déduire l'expression de J^n en fonction de J
- **c.** Expliciter deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$.
- **d.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad M^n = [1 - (-3)^n]\, J + (-3)^n I$.

3. Utilisation d'une matrice semblable

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_2 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$

- **a.** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b.** Déterminer P, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.
- **c.** Expliciter la matrice P^{-1}.
- **d.** Déterminer N qui est la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
- **e.** Pour tout entier naturel n, établir une relation entre les matrices M^n, N^n, P et P^{-1}.
- **f.** Conclure.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. a. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad W_n > 0$.

3. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

On pourra effectuer une intégration par parties et utiliser la relation entre les carrés du sinus et du cosinus.

b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.

4. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

b. En déduire : $\quad W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

c. Établir alors que $\quad W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

On pourra utiliser le résultat de **3b**.

5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

On pourra raisonner par récurrence et utiliser **3a**.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $\quad A_n = \dfrac{1}{n!}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $\quad a_n = -1 - (n - \dfrac{1}{2})\ln(1 - \dfrac{1}{n})$.

6. a. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $t \longmapsto \ln\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)$.

b. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^2}$.

c. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $\quad a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression simple de $\sum_{k=2}^{n} a_k$.

9. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

10. a. Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.

On répartit n balles dans 3 boites B_1, B_2 et B_3 (chaque boite est supposée pouvoir contenir l'intégralité des n balles), sachant que chaque balle peut être placée dans l'une des trois boites de façon équiprobable, et que le balles sont placées indépendamment les une des autres.

On suppose que cette expérience aléatoire est modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note X_i le nombre de balles finalement placée dans la boite B_i. De même, on note V le nombre de boite(s) restée(s) vide(s) à l'issue de l'expérience.

On admettra que X_1, X_2, X_3 et V sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $i \in [\![1, 3]\!]$.

a. Expliciter $X_i(\Omega)$.

b. Donner la loi de X_i.

2. a. Que représente $X_1 + X_2$?

b. Donner la loi de $X_1 + X_2$.

c. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? (une réponse argumentée est attendue)

d. Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + X_3$?

e. Que dire des événements $[X_1 = n]$ et $[X_2 = n]$?

3. Expliciter $V(\Omega)$

4. a. Expliciter l'événement $[V = 2]$ à l'aides des événements $[X_1 = n], [X_2 = n]$ et $[X_3 = n]$.

b. En déduire $\mathbb{P}(V = 2)$.

5. a. Expliciter l'événement $[V \geqslant 1]$ à l'aides des événements $[X_1 = 0], [X_2 = 0]$ et $[X_3 = 0]$.

b. Si A et B sont deux événements, expliciter $\mathbb{P}(A \cup B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

c. Établir que, si A, B et C sont trois événements :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \Big(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)\Big) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

d. En déduire $\mathbb{P}(V \geqslant 1)$.

6. Donner la loi de V.