MINISTÈRE
DE LA TRANSITION
ÉCOLOGIQUE
ET DE LA COHÉSION
DES TERRITOIRES

Liberté
Égalité
Fraternité

CONCOURS INTERNE D'INGENIEURS DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ETAT

SESSION 2023

CODE CONCOURS INTERNE : ITPE-INT-10

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures - Coefficient 4)

CODE EPREUVE CONCOURS INTERNE : MATHEMATIQUES

Épreuve n°2 - épreuve écrite de mathématiques

Durée : 4 heures ; coefficient 4

Une note inférieure à 5 sur 20 peut être éliminatoire.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET

- Les candidats doivent remplir en totalité le bandeau situé en haut de chacune de leurs feuilles de composition (code concours, code épreuve, spécialité, y compris le numéro d'inscription communiqué dans leur convocation).

- L'usage de la calculatrice ou de tout autre matériel électronique, est interdit.

- Les candidats ne doivent pas faire de marge sur leur copie.

- Les candidats ne doivent faire apparaître aucun signe distinctif dans la copie, ni leur nom ou un nom fictif, ni signature ou paraphe.

- Pour rédiger, seul l'usage d'un stylo à bille noir ou bleu est autorisé. L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, pouvant être considérée comme un signe distinctif proscrit.

- Aucun liquide blanc ni ruban correcteur ne doit être employé, cela peut empêcher la numérisation de la copie et par conséquent sa correction. Les ratures propres à la règle sont préférables.

- Les feuilles de brouillon ou tout autre document ne sont pas considérés comme faisant partie de la copie et ne feront pas l'objet d'une correction.

Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner une sanction par le jury.

Informations liminaires :

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Épreuve de mathématiques

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer explicitement, par deux méthodes différentes, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\left\{\begin{array}{l}(u_0,u_1,u_2)\in\mathbb{R}^3\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-3u_{n+1}+2u_n=0.\end{array}\right.$

Partie I

Dans cette partie, on se propose d'utiliser le calcul matriciel pour déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression explicite de u_n.

Soit $A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=A^nX_0$.
3. <u>Calcul de A^n, $n\in\mathbb{N}$:</u>
   (a) Soit $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.
      i. Déterminer une matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T=B+I_3$.
      ii. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $B^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&(-3)^n\end{pmatrix}$.
      iii. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$, une expression de T^n.

   (b) Soit $P=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

   (c) Calculer PTP^{-1}, puis en déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de A^n.
4. À l'aide des questions 2 et 3c, expliquer comment exprimer u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2 (on ne demande pas d'expliciter le calcul).

Partie II

On note :
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.
- $E=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-3u_{n+1}+2u_n=0\}$
- $F=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n\}$
- $G=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0\}$

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Démontrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On déterminera une base et la dimension de F.
   On admet que G est un espace vectoriel de dimension 2 et que $((n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de G.
3. Démontrer que la somme $F + G$ est directe.
4. Démontrer que les ensembles F et G sont tous deux inclus dans E.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ et $w_n = -u_{n+2} + 2u_{n+1} + 8u_n$.
   (a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.
   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{9}v_n + \dfrac{1}{9}w_n$.
   (c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
6. (a) En utilisant les questions précédentes, démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   (b) Déterminer une base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_2, u_1 et u_0.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer J_0, I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
4. En intégrant par parties deux fois, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n.$$
6. Déduire de la question précédente que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{4} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n.$$
7. (a) Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\sin(x) - x$.
      i. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis montrer que f' est strictement décroissante et s'annule une unique fois sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
      ii. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.
      iii. Tracer la courbe représentative de la fonction sin. Comment peut-on interpréter graphiquement l'inégalité $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$?
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (c) À l'aide de la question 2, vérifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}I_n$ puis montrer que :
$$0 \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n \leq \frac{\pi^3}{16} \times \frac{1}{n+1}.$$

(d) Justifier que $\left(\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

8. Déduire des questions précédentes que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 3

On considère une boîte contenant des jetons indiscernables au toucher et sur lesquels est écrite une lettre. Un jeu consiste à effectuer une suite de tirages au hasard et avec remise dans cette boîte ; en fonction de la lettre tirée, le joueur peut gagner ou perdre de l'argent.
Dans une première version du jeu, la boîte contient seulement deux jetons : l'un portant la lettre A, l'autre la lettre B. Le joueur gagne un euro s'il tire la lettre A, et il ne gagne ni ne perd rien s'il tire la lettre B. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au gain total du joueur après n tirages.
Les tirages successifs sont supposés indépendants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.

On considère le même jeu, mais on suppose maintenant que l'urne contient un troisième jeton C. Les règles pour les jetons A et B restent inchangées, mais lorsque le joueur tire la lettre C, il perd tout ce qu'il avait gagné précédemment.
Pour tout entier naturel n non nul, on note toujours X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur après n tirages ; on note également A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « au n-ième tirage, le joueur a obtenu la lettre A (respectivement B, C) ».

2. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2.
3. En exprimant les différents événements $(X_3 = k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, à l'aide de X_2 et des événements A_3, B_3, C_3, déterminer la loi de X_3.
4. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, $P(X_n = n)$.
5. En observant que $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1})$ est un système complet d'événements, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3} \times P(X_n = 0) + \frac{1}{3}.$$

6. (a) Résoudre l'équation $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. On notera ℓ la solution de cette équation.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P(X_n = 0)$ et $v_n = u_n - \ell$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n puis de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.
7. En utilisant le système complet d'événements $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1})$, démontrer que pour tout entier n non nul et pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{3} \times P(X_n = k) + \frac{1}{3} \times P(X_n = k-1). \quad (*)$$

8. Déterminer la loi de X_4.
9. En multipliant l'égalité $(*)$ par k et en sommant, montrer que :

$$E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} \times E(X_n) + \frac{1}{3}.$$

10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)$ en fonction de n.