ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2024**

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

► d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C.)

&

► d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE (I.C.N.A.)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient 4
ICNA : Coefficient 2

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto)
- 1 page de consignes (recto)
- 4 pages de sujet numérotées de 1 à 4 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.

2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.

3) Numéroter chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n’est pas nécessaire de numéroter les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

   Par exemple, pour la 6e page d’une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroter ainsi la page 6 sur 7 :

   ..6/..7.

4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l’épreuve.

5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

♦ ♦ ♦

Problème 1

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathcal{C} = (e_1,...,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels formées de n lignes et $GL_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
Étant donné un endomorphisme f de $M_n(\mathbb{R})$, on dit que :

- *f conserve le rang* si, pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(f(X)) = \mathrm{rg}(X)$.
- *f conserve le déterminant* lorsque, pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(f(X)) = \det(X)$.

L'objet de ce problème, développé dans la seconde partie, est d'établir que :

« f conserve le déterminant $\Rightarrow$ f conserve le rang $\Rightarrow$ f est bijectif ».

Pour ce faire, la première partie présente différents résultats utiles.

Première partie

Résultats préliminaires

Q1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de l'image de u et une base de son noyau.

b) On pose $a = (1,-2,-1)$. Montrer que les familles $\mathcal{B} = (e_1, e_2, a)$ et $\mathcal{B}' = (u(e_1), u(e_2), e_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ (départ) et $\mathcal{B}'$ (arrivée).

c) En déduire des matrices inversibles $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

Q2. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang $r \in [\![1, n]\!]$ et u_A l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(\varepsilon_{r+1},...,\varepsilon_n)$ soit une base du noyau de u_A.

b) On pose $F = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r\}$ et $v : F \to \mathrm{Im}(u_A)$, $x \mapsto v(x) = u_A(x)$. Montrer que v est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que la famille $(u_A(\varepsilon_1),...,u_A(\varepsilon_r))$ est une base de l'image de u_A.

c) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u_A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soit (écriture par blocs) :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

(La matrice J_r est donc composée de r coefficients égaux à 1 situés sur les r premières lignes de la diagonale, les autres coefficients sont nuls.)

d) En déduire qu'il existe des matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$.

Q3. Soient $r \in [\![1,n]\!]$ et $M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices dont les lignes $r+1$, $r+2$, … jusqu'à n sont nulles (pour $r=n$, $M_n^{(r)}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Q4. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $p_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto p_{A,B}(t) = \det(A+tB)$.
a) Montrer que si $B \in M_n^{(1)}(\mathbb{R})$ alors $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
b) Montrer que si $B \in M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ alors $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à r.
c) On suppose que $B \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \in [\![1,n]\!]$. En utilisant la question 2, montrer que $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à r.
d) On suppose à nouveau que B est de rang $r \in [\![1,n]\!]$. Montrer qu'il est possible de choisir la matrice A de sorte que $p_{A,B}$ soit de degré exactement r.

Seconde partie
Conservation du rang, conservation du déterminant

Q5. Donner un exemple de symétrie vectorielle de $M_n(\mathbb{R})$, autre que l'identité, qui conserve le rang et conserve le déterminant.

Q6. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto \varphi_A(X) = AXA^{-1}$.
Montrer que φ_A est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le rang et le déterminant.

Q7. Montrer que si f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le rang alors f est bijectif.

Q8. Dans cette question uniquement, on considère l'endomorphisme
$$f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}),\ X \mapsto f(X) = X + \mathrm{tr}(X) I_n,$$
où tr désigne la fonction trace.
a) Déterminer le noyau de f.
b) Que penser de la réciproque de l'affirmation de la question 7 ?

Q9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $g_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto g_A(X) = AX$.
a) Montrer que l'endomorphisme g_A est bijectif si, et seulement si, A est inversible.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que g_A conserve le rang puis, pour que g_A conserve le déterminant.

Q10. Soit f un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant.
a) On se donne une matrice non nulle $X \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $Y \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X+Y$ ne soit pas inversible.
b) Déterminer le noyau de f et en déduire que f est bijective.
c) Réciproquement, un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ conserve-t-il forcément le déterminant ?

Q11. Montrer que si f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant, alors il conserve le rang.
Indication : Si $X \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rang $r \in [\![1,n]\!]$, utiliser les résultats de la question 4 afin de comparer les degrés des fonctions polynômes $p_{A,X}$ et $p_{f(A),f(X)}$ pour des matrices A bien choisies.

Problème 2

Équations différentielles et séries entières

Q1. On pose $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto H(x)=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$.

a) Justifier l'existence de $H(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

c) Établir que H est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_0)\ :\ xy''+y'-xy=0\,.$$

Q2. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_0) sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$.

a) Soient $y:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $\lambda:I\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\lambda(x)=\frac{y(x)}{H(x)}\ \text{pour tout}\ x>0\,.$$

Montrer que y est solution de (E_0) sur I si, et seulement si, pour tout $x\in I$,

$$xH(x)\lambda''(x)+\left(2xH'(x)+H(x)\right)\lambda'(x)=0\,.$$

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1)\ \ xH(x)\,z'+\left(2xH'(x)+H(x)\right)z=0\ \text{ d'inconnue }\ z\in\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})\,,$$

puis en déduire les solutions de (E_0) sur I qui seront exprimées à l'aide des fonctions H et

$$G:I\to\mathbb{R}\,,\ x\mapsto G(x)=\int_1^x\frac{dt}{tH(t)^2}\,.$$

Q3. On considère désormais l'équation différentielle $(E_2)\ :\ xy''+y'-xy=2$ dont l'inconnue y est une fonction à valeurs réelles.

a) Soit $y:]-R,R[\to\mathbb{R}$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ $(R>0)$ dont l'expression analytique est de la forme

$$y(x)=\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\,,$$

où les coefficients a_n sont réels. Montrer que y est solution de (E_2) sur $]-R,R[$ si, et seulement si, $a_1=2$ et, pour tout $n\geq 2$, $n^2a_n=a_{n-2}$.

b) En déduire les expressions de a_{2p} et de a_{2p+1} en fonction de $p\in\mathbb{N}$. Les réponses feront intervenir des factorielles.

c) Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et en déduire toutes les solutions de (E_2) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

Q4. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ x\mapsto f(x)=\int_0^\pi e^{x\sin t}dt$.

a) Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation sous le signe intégral.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pourra commencer par considérer la restriction de f à l'intervalle $[-a,a]$ où a est un réel strictement positif.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q5. Montrer que f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. Indication : on pourra effectuer une intégration par parties sur l'intégrale obtenue à partir de l'expression $xf''(x)-xf(x)$.

Q6. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\int_0^\pi\sin^n t\,dt$.

a) Rappeler l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme (pour une série de fonctions).

b) En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide des nombres W_n.

c) En utilisant les résultats de la question 3, donner l'expression des intégrales W_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (la réponse distinguera deux cas selon la parité de n).