

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

► d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C.)

&

► d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE
(I.C.N.A.)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

PHYSIQUE

Durée : 3 heures

IEEAC : Coefficient 3

ICNA : Coefficient 2

Cette épreuve comporte :

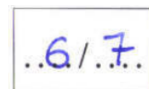
- 1 page de garde (recto)
- 1 page de consignes (recto)
- 1 page d'avertissement (recto)
- 7 pages de sujet numérotées de 1 à 7 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6^e page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi la page 6 sur 7 :



- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

AVERTISSEMENT

L'utilisation des calculatrices est interdite.

Les applications numériques seront effectuées et exprimées avec 1 chiffre significatif afin d'avoir une idée de la grandeur physique attendue.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les candidats travailleront avec les expressions littérales et n'effectueront l'application numérique qu'à la fin. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les candidats répartiront équitablement leur temps entre les trois exercices qui constituent cette épreuve. Le premier exercice porte sur le principe de la détection synchrone, le second sur l'expérience historique de Fourier et le dernier sur un oscillateur mécanique.

EXERCICE n°1 : Détection synchrone

On rencontre le principe de la détection synchrone dans beaucoup de systèmes qui permettent la recherche d'une information perturbée par un signal parasite. Le montage électrique est donné figure 1.

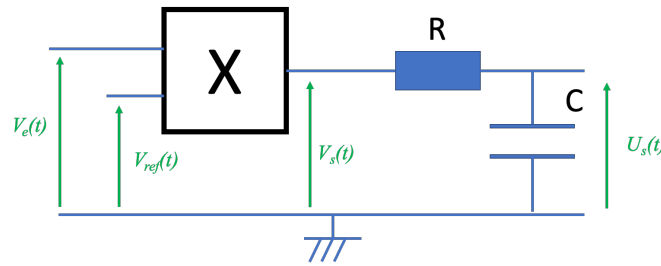


Figure 1

Le signal d'entrée $v_e(t)$ est la somme d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d'un terme parasite que l'on notera $b(t)$ supposé sinusoïdal de fréquence f_b .

$$b(t) = b_0 \cos(2\pi f_b t) \quad \text{soit} \quad v_e(t) = V_e \cos(2\pi f t) + b(t).$$

Le principe de la détection synchrone est alors d'accéder expérimentalement à une mesure de V_e tout en s'affranchissant du signal parasite.

La tension d'entrée $v_e(t)$ est multipliée par un signal de référence $v_{ref}(t) = V_{ref} \cos(2\pi f t)$ de fréquence f , d'où le nom de détection synchrone.

Le signal de sortie est $v_s(t) = k v_e(t) v_{ref}(t)$ où k est une constante caractéristique de multiplieur. Il est ensuite filtré pour obtenir $u_s(t)$.

I Étude du filtre

On étudie tout d'abord le filtre RC. On se place en régime sinusoïdal forcé. On associe à la grandeur $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe $\underline{u}(t) = U_m \exp(j(\omega t + \varphi))$ et $\underline{U} = U_m \exp(j\varphi)$ avec $j^2 = -1$.

Q1 Prévoir la nature du filtre à partir d'une étude qualitative en haute et basse fréquence.

Q2 Déterminer la fonction de transfert en notation complexe $\underline{H}(jf) = \underline{U}_s / \underline{V}_s$.

Q3 Mettre le résultat sous sa forme canonique : $\underline{H}(jf) = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$. Exprimer H_0 et f_0 en

fonction de R et C .

II Le multiplieur

Q4 En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a) \cos(b) = 1/2 (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, montrer que la sortie du multiplieur s'écrit sous la forme d'une somme :

$$v_s(t) = A + B \cos(4\pi f t) + C \cos(2\pi (f_b - f)t) + C \cos(2\pi (f_b + f)t)$$

On explicitera les constantes A , B et C en fonction de V_e , V_{ref} , b_0 et k .

Q5 Tracer le spectre de $v_s(t)$.

Q6 Préciser les fréquences des deux composantes sinusoïdales impactées par le signal parasite b_0 .

III Action du filtre

Q7 Le circuit RC étant composé d'éléments linéaires, on peut appliquer le principe de superposition. Rappeler l'énoncé de ce principe.

Q8 Préciser l'expression de l'amplitude des sorties U_{sm_1} , U_{sm_2} , U_{sm_3} et U_{sm_4} associées respectivement aux 4 composantes du signal $v_s(t)$ après filtrage en fonction de A , B , C , f , f_b et f_0 .

Supposons que le signal parasite a une fréquence $f_b = 600 \text{ Hz}$ et que le signal de référence est à la fréquence $f = 500 \text{ Hz}$.

Q9 Le signal parasite a une amplitude b_0 dix fois plus importante que l'amplitude V_e du signal que l'on cherche à mesurer. Si on souhaite atténuer l'amplitude de la composante de $u_s(t)$ associée au signal parasite d'amplitude b_0 de plus basse fréquence par un facteur 1000 grâce au filtre RC, quelle valeur doit on choisir pour f_c ? (On recherche une inégalité)

Q10 Faire l'application numérique.

EXERCICE n°2 : Expérience originelle de J. Fourier

I Loi de Fourier

Q1 Énoncer la loi de Fourier pour la conduction thermique. Définir les grandeurs utilisées et en préciser l'unité dans le système international.

Q2 En électrocinétique, il existe une loi analogue. Quelle est le nom de cette loi ?

Dresser un tableau du type de la figure 2 des différentes grandeurs en précisant les dimensions.

Thermique	Électricité	Nom	Dimension
T			
λ			
...			
flux			

Figure 2

II Présentation

Un des dispositifs utilisés par J. FOURIER était constitué d'un anneau solide indéformable en fer homogène et isotrope (figure 3 a), ayant la forme d'un tore d'axe [Oz] de rayon moyen $R = 20 \text{ cm}$ et de section carrée $a = 2 \text{ cm}$ avec a très petit devant R .

On note $c = 500 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique du fer, $\mu = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$ sa masse volumique et λ sa conductivité thermique.

Des cavités de petites dimensions étaient percées et remplies de mercure dans lesquelles plongeaient des thermomètres.

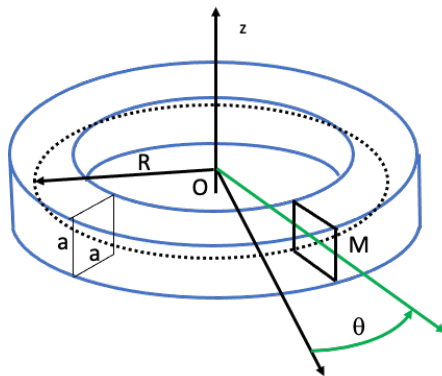


Figure 3 a

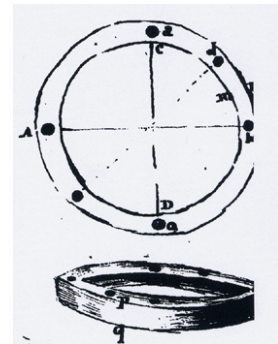


Figure 3 b

La température est supposée uniforme sur une section droite du tore. On repère un point M de l'anneau par sa position angulaire θ comprise entre $-\pi$ et π . On note $T(\theta, t)$ la température en M à la date t .

A l'instant initial, on a chauffé le tore en $\theta = 0$ à une température T_c et le profil de température initial noté $T_0(\theta)$ est non uniforme. Pour des raisons de symétrie la fonction $T_0(\theta)$ est paire.

Ensuite le tore est enfoui dans du sable considéré comme un parfait isolant thermique.

Fourier étudia l'évolution de la température en différentes positions du tore.

Q3 Préciser l'écriture du vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_{th}(M, t)$ en fonction des données.

Q4 Compte tenu des symétries du problème, que dire de $T(\theta, t)$ et $j_{th}(\theta, t)$?
Que pouvez-vous dire du vecteur densité de flux thermique : $j_{th}(\theta, t)$ en $\theta = \pi$?

Q5 Tracer l'allure de $T(\theta, t)$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ à trois dates : $t = 0$, t tendant vers l'infini et t intermédiaire.
Sous le même graphique, tracer l'allure de $j_{th}(\theta, t)$.

III Mise en équation et résolution

Q6 A l'aide d'un bilan thermique appliqué à une section du tore entre θ et $\theta + d\theta$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(\theta, t)$:

$$\frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T(\theta, t)}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T(\theta, t)}{\partial \theta^2}$$

On recherche une solution par la méthode de séparation des variables. On note T_m la valeur moyenne de $T_0(\theta)$.

Et on pose $T(\theta, t) = T_m + f(\theta) h(t)$.

Q7 Montrer que l'on peut séparer les variables c'est à dire que l'on obtient une expression du type : $H(t) = F(\theta)$ avec $H(t) = \frac{1}{h(t)} \frac{dh(t)}{dt}$.

Exprimer $F(\theta)$.

Q8 Justifier que l'on doit poser $H(t) = F(\theta) = cste = -\frac{1}{\tau}$. Pourquoi doit on prendre une constante négative ? Préciser la dimension de τ .

Q9 Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.

Q10 Pour la résolution de l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$, on introduira, sans chercher à l'exprimer, une autre constante arbitraire positive homogène à une distance δ . Exprimer δ en fonction de λ , c , μ et τ .

Q11 Résoudre l'équation vérifiée par $f(\theta)$.

IV Décomposition en série de FOURIER

Q12 A partir des symétries du problème vues à la question 5, montrer que cette solution dépend alors d'un entier naturel non nul n et peut se mettre sous la forme :

$$T_n(\theta, t) - T_m = A_n \cos(n\theta) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

où l'on précisera l'expression de τ_n en fonction de n et des autres constantes de l'énoncé.

A_n est trouvé à l'aide des conditions initiales $T_0(\theta)$.

On s'intéresse à la durée du régime transitoire pour le fondamental $n = 1$.

J Fourier formule l'observation suivante : « les écarts de température par rapport à la valeur moyenne deviennent rapidement proportionnelles au cosinus de l'angle θ »

Q13 Commenter les propos de J Fourier.

Q14 Préciser le « rapidement » (Déterminer τ_1 et faire l'application numérique).

V Régime permanent dans l'air

L'anneau est maintenant placé dans l'air ambiant de température T_e uniforme et indépendante du temps. Selon la loi de Newton, le flux thermique conducto-convectif sortant par l'élément de surface latérale dS_{lat} de l'anneau, et donc cédé à l'air ambiant, vaut $d\phi = h(T(\theta, t) - T_e)dS_{lat}$ où h est le coefficient de transfert conducto-convectif entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et $T(\theta, t)$ la température de la portion d'anneau considérée à l'instant t .

Q15 Reprendre le bilan thermique de la question Q6 et établir la nouvelle équation.

Q16 Que devient cette équation en régime permanent ? On introduira un paramètre l tel que $l = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$.

Q17 Donner la solution de l'équation différentielle vérifiée par la température $T(\theta)$ en faisant intervenir des exponentielles, en fonction de deux constantes dépendant des conditions aux limites.

Q18 On donne une première condition aux limites : $T = T_c$ pour $\theta = 0$, valeur fixée par le chauffage. Quelle est l'autre condition limite sur $\frac{dT(\theta)}{d\theta}$ en $\theta = \pi$?

Q19 Exprimer $T(\theta)$. La réponse ne fera plus intervenir d'exponentielles mais un rapport de deux cosinus hyperboliques.

Rappel: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

VI Historique

On place trois thermomètres dans les sections M_1 , M_2 et M_3 repéré par $\theta_1 = \theta_2 - \alpha$, θ_2 et $\theta_3 = \theta_2 + \alpha$, et on note $\Delta T_i = T(\theta_i) - T_e$

D'après Fourier, le rapport $q = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$ ne dépend que des dimensions ou de la nature de l'anneau et non de la manière dont ce solide est chauffé.

Q20 Démontrer qu'effectivement ce rapport q ne dépend ni de θ_2 , ni de la température T_c de la section repérée par l'angle $\theta = 0$ au-dessous de laquelle on a placé le dispositif de chauffage.

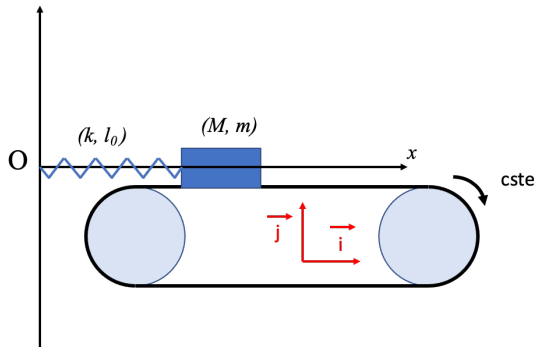
Q21 Application numérique

Sur les relevés d'expériences de Fourier du 31 juillet 1806, on lit qu'après 2 heures chauffage, les valeurs des températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires et que les thermomètres indiquent, par des lectures au tiers de degré près: 20°C pour l'air ambiant, 70°C pour $\theta_1 = \pi/2$ rad, 55°C pour $\theta_2 = 3\pi/4$ rad et 40°C pour $\theta_3 = \pi$ rad (Figure 3b)

Calculer le rapport q_{exp} donné par les relevés expérimentaux de Fourier et comparer à la valeur théorique q_{th} .

EXERCICE n°3 : Oscillateur mécanique

Un objet considéré comme ponctuel M , de masse m , est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse v constante par rapport au sol supposé galiléen. Cet objet, qui est choisi comme « système », est également relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k de longueur à vide l_0 . La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse $x(t)$ (axe horizontal). A l'instant $t = 0$, le ressort n'est pas tendu.



Q1 Rappeler l'expression de la tension du ressort sur le point M à une date t : $\vec{T}(x(t))$.

I Phase n°1

On constate que tant que l'intensité de la force de traction T exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur T_c , l'objet reste « collé », c'est-à-dire fixe par rapport au tapis.

Q2 Exprimer alors la loi horaire $x(t)$ durant cette phase.

Q3 Écrire une relation simple entre la force de frottement F exercée par le tapis sur l'objet et la force $T(x(t))$ exercée par le ressort. Justifier.

Q4 En déduire $F(t)$ la composante suivant $\vec{e}_x$ de la force exercée par le tapis sur l'objet.

II Phase n°2

Cependant dès que T atteint la valeur T_c , l'objet « glisse » et on considère qu'il glisse sans frottement sur le tapis : la réaction tangentielle F s'annule, et l'objet n'est plus soumis qu'à l'action du ressort.

Q5 Exprimer, en fonction de T_c , k et v , l'instant t_1 à partir duquel l'objet glisse sur le tapis.

Q6 A quelle équation différentielle obéit la position $x(t)$ de cet objet dans la phase qui suit ?

Q7 Justifier que la solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega_0 (t - t_1) + \alpha)$$

où x_0 , A , ω_0 et α sont des constantes.

Q8 Exprimer ω_0 en fonction de k et de m .

Q9 En tenant compte des conditions initiales, exprimer x_0 , $\tan(\alpha)$ et A en fonction de v , t_p , l_0 et ω_0 .

III Phase n°3

Dès que la vitesse du point M est nulle, de nouveau la masse M se colle au tapis.

Q10 Exprimer la date t_2 instant où la masse se solidarise au tapis en fonction de A , t_1 et ω_0 .

Q11 Tracer l'allure $x(t)$ et $F(t)$.

Q12 Quelle est la période des oscillations T_{osc} ?

FIN