

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

► d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C.)

&

► d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE
(I.C.N.A.)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient 4

ICNA : Coefficient 2

Cette épreuve comporte :

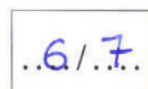
- ➡ 1 page de garde (recto)
- ➡ 1 page de consignes (recto)
- ➡ 4 pages de sujet numérotées de 1 à 4 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6^e page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi la page 6 sur 7 :



- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.



Problème 1

Première partie

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \int_0^{\pi/2} \text{Arctan}(x \tan t) dt$.

Q1. a) Rappeler la définition de la fonction Arc tangente et expliciter sa fonction dérivée. Construire la courbe représentative de Arctan et celle de son application réciproque sur un même schéma. Les éventuelles droites asymptotes seront représentées.

b) Rappeler l'énoncé du théorème de continuité sous le signe intégral.

Q2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q3. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et étudier la parité de g .

Q4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$, exprimer $g'(x)$ sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer. Indication : on pourra commencer par étudier la restriction de g à l'intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Q5. Pour $x > 0$, montrer que $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi^2}{4}$.

Indication : On pourra considérer la dérivée de la fonction $x \mapsto g(\frac{1}{x})$ et utiliser un changement de variable du type « $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ ».

Q6. En déduire la limite de g en $+\infty$.

Q7. a) Calculer $g'(1)$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel u , on ait :

$$\frac{u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)} = \frac{au}{1+u^2} + \frac{bu}{1+x^2u^2}.$$

c) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$

Q8. a) Rappeler l'énoncé du théorème « limite de la dérivée ».

b) Retrouver alors la valeur de $g'(1)$. g est-elle dérivable en 0 ?

Q9. Construire la courbe représentative de g . On positionnera les tangentes étudiées.

Seconde partie

Applications

▷ **Application à l'étude d'une suite récurrente.**

Q10. Montrer que g admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α .

Q11. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$. Étudier, selon les valeurs de u_0 , la monotonie et la convergence de cette suite.

▷ **Application au calcul de la somme d'une série.**

Q12. a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$ puis, en utilisant les résultats de la première partie, préciser sa valeur.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_n = \int_0^1 x^{2n} \ln x dx$.

Q13. a) Rappeler l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

b) Établir que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Q14. En utilisant la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$, calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Problème 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E , soit

$$\mathcal{H}(E) = \{k \cdot Id_E ; k \in \mathbb{R}^*\}.$$

Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

Ce problème s'intéresse à la décomposition d'un endomorphisme de E sous la forme d'une somme de projecteurs. La première partie fournit une condition **(C)** nécessaire à l'existence d'une telle décomposition. La deuxième partie étudie le cas des homothéties vectorielles.

Enfin la troisième partie montre que la condition **(C)** est suffisante en dimension 2.

Preliminaires

Q1. Soit f un endomorphisme non nul de E tel que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est liée.

a) Dans le cas où E est de dimension 1, que peut-on en déduire concernant f ?

b) On suppose que $n \geq 2$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

(i) Que peut-on dire de la matrice de f dans $\mathcal{B}$?

(ii) Montrer que $f \in \mathcal{H}(E)$. On pourra considérer le vecteur $e_i + e_j$ pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$.

Première partie

Une condition nécessaire

Q2. Questions de cours.

a) Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, rappeler la définition de la trace de A , notée $\text{tr}(A)$, et montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

b) En déduire que si f est un endomorphisme de E , la trace de la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E est indépendante du choix de $\mathcal{B}$. On appelle *trace de f* et on note $\text{tr}(f)$ la valeur commune des traces des matrices qui représentent f .

Q3. Un exemple. Dans cette question uniquement, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de E et on pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 2z = 0\}, \quad G = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\}.$$

a) Montrer que $F \oplus G = E$ puis écrire la matrice M de la projection vectorielle p sur F parallèlement à G dans la base $\mathcal{B}$ (vous devez obtenir une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

b) On note q l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que q est un projecteur et déterminer ses espaces caractéristiques.

c) Déterminer la trace et le rang de l'endomorphisme $f = p + 3q$.

Q4. a) Soit f un endomorphisme de E . Montrer que si f est un projecteur de E , alors $\text{tr}(f) = \text{rg}(f)$. Que dire de la réciproque ?

b) Soient f et g deux endomorphismes de E . Montrer que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

Q5. Soit f un endomorphisme de E qui s'écrit comme une somme de projecteurs de E :

$$f = \sum_{j=1}^m p_j,$$

où les projecteurs $p_1, \dots, p_m$ ne sont pas forcément deux à deux distincts.

Montrer que

$$(\mathbf{C}) : \text{tr}(f) \in \mathbb{N} \text{ et } \text{tr}(f) \geq \text{rg}(f).$$

Deuxième partie

Cas des homothéties vectorielles

Q6. Soient $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le coefficient $a_{j,j}$ pour que $P_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_{i,j}$ soit la matrice d'un projecteur.

Q7. Soient q et r des entiers naturels tels que $q \geq 1$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est

$$M = rJ_n + q \sum_{j=1}^n P_j,$$

$$\text{où } J_n = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_{i,j} \text{ avec } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -\frac{r}{nq} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Que vaut J_n^2 ?

b) Donner une expression simplifiée de M et montrer que f est une somme de projecteurs.

Q8. Quelles sont les homothéties de E qui s'écrivent comme une somme de projecteurs ?

Troisième partie
Cas de la dimension 2

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et on désigne par f un endomorphisme non nul de E qui vérifie la condition

$$(C) : \operatorname{tr}(f) \in \mathbb{N} \text{ et } \operatorname{tr}(f) \geq \operatorname{rg}(f).$$

On se propose de montrer que f est une somme de projecteurs.

Q9. On suppose que f est de rang 1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*,$$

et en déduire que f est une somme de projecteurs de E . Plus précisément, on montrera qu'il existe un projecteur p de E , de rang 1, tel que $f = \operatorname{tr}(f) \cdot p$.

Q10. Étant donné une base (u, v) de E , montrer qu'il existe un unique projecteur p tel que $p(u) = v$. Exprimer le noyau et l'image de p en fonction de u et v .

Q11. On suppose que f est de rang 2 et que f n'est pas une homothétie vectorielle.

a) Montrer qu'il existe un vecteur $u_0 \in E$ pour lequel la famille $(u_0, f(u_0))$ est libre.

b) Soit p la projection de E telle que $p(u_0) = f(u_0)$. En considérant l'endomorphisme $g = f - p$, établir que f est une somme de projecteurs.

Q12. Application. Écrire la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ comme somme de matrices de projecteurs.

