

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT :

► d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C.)

&

► d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE
(I.C.N.A.)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient 4

ICNA : Coefficient 2

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto)
- 1 page de consignes (recto)
- 4 pages de sujet numérotées de 1 à 4 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6^e page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi la page 6 sur 7 :

..6/.7.

- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.



Problème 1

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels formées de n lignes et $GL_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

Étant donné un endomorphisme f de $M_n(\mathbb{R})$, on dit que :

- f conserve le rang si, pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}(f(X)) = \text{rg}(X)$.
- f conserve le déterminant lorsque, pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(f(X)) = \det(X)$.

L'objet de ce problème, développé dans la seconde partie, est d'établir que :

« f conserve le déterminant $\Rightarrow f$ conserve le rang $\Rightarrow f$ est bijectif ».

Pour ce faire, la première partie présente différents résultats utiles.

Première partie

Résultats préliminaires

Q1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de l'image de u et une base de son noyau.

b) On pose $a = (1, -2, -1)$. Montrer que les familles $\mathcal{B} = (e_1, e_2, a)$ et $\mathcal{B}' = (u(e_1), u(e_2), e_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ (départ) et $\mathcal{B}'$ (arrivée).

c) En déduire des matrices inversibles $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

Q2. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et u_A l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base du noyau de u_A .

b) On pose $F = \text{Vect}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ et $v : F \rightarrow \text{Im}(u_A)$, $x \mapsto v(x) = u_A(x)$. Montrer que v est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que la famille $(u_A(\varepsilon_1), \dots, u_A(\varepsilon_r))$ est une base de l'image de u_A .

c) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u_A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soit (écriture par blocs) :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

(La matrice J_r est donc composée de r coefficients égaux à 1 situés sur les r premières lignes de la diagonale, les autres coefficients sont nuls.)

d) En déduire qu'il existe des matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$.

Q3. Soient $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices dont les lignes $r+1, r+2, \dots$ jusqu'à n sont nulles (pour $r = n$, $M_n^{(r)}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Q4. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $p_{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto p_{A,B}(t) = \det(A + tB)$.

a) Montrer que si $B \in M_n^{(1)}(\mathbb{R})$ alors $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

b) Montrer que si $B \in M_n^{(r)}(\mathbb{R})$ alors $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à r .

c) On suppose que $B \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En utilisant la question 2, montrer que $p_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à r .

d) On suppose à nouveau que B est de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer qu'il est possible de choisir la matrice A de sorte que $p_{A,B}$ soit de degré exactement r .

Seconde partie

Conservation du rang, conservation du déterminant

Q5. Donner un exemple de symétrie vectorielle de $M_n(\mathbb{R})$, autre que l'identité, qui conserve le rang et conserve le déterminant.

Q6. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto \varphi_A(X) = AXA^{-1}$.

Montrer que φ_A est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le rang et le déterminant.

Q7. Montrer que si f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le rang alors f est bijectif.

Q8. Dans cette question uniquement, on considère l'endomorphisme

$$f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), X \mapsto f(X) = X + \text{tr}(X)I_n,$$

où tr désigne la fonction trace.

a) Déterminer le noyau de f .

b) Que penser de la réciproque de l'affirmation de la question 7 ?

Q9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $g_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto g_A(X) = AX$.

a) Montrer que l'endomorphisme g_A est bijectif si, et seulement si, A est inversible.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que g_A conserve le rang puis, pour que g_A conserve le déterminant.

Q10. Soit f un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant.

a) On se donne une matrice non nulle $X \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $Y \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X + Y$ ne soit pas inversible.

b) Déterminer le noyau de f et en déduire que f est bijective.

c) Réciproquement, un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ conserve-t-il forcément le déterminant ?

Q11. Montrer que si f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant, alors il conserve le rang.

Indication : Si $X \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, utiliser les résultats de la question 4 afin de comparer les degrés des fonctions polynômes $p_{A,X}$ et $p_{f(A),f(X)}$ pour des matrices A bien choisies.

Problème 2

Équations différentielles et séries entières

Q1. On pose $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto H(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{4^p(p!)^2}$.

- a) Justifier l'existence de $H(x)$ pour tout réel x .
- b) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.
- c) Établir que H est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_0) : xy'' + y' - xy = 0.$$

Q2. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_0) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

- a) Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\lambda(x) = \frac{y(x)}{H(x)} \text{ pour tout } x > 0.$$

Montrer que y est solution de (E_0) sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$,

$$xH(x)\lambda''(x) + (2xH'(x) + H(x))\lambda'(x) = 0.$$

- b) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad xH(x)z' + (2xH'(x) + H(x))z = 0 \text{ d'inconnue } z \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}),$$

puis en déduire les solutions de (E_0) sur I qui seront exprimées à l'aide des fonctions H et

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) = \int_1^x \frac{dt}{tH(t)^2}.$$

Q3. On considère désormais l'équation différentielle $(E_2) : xy'' + y' - xy = 2$ dont l'inconnue y est une fonction à valeurs réelles.

- a) Soit $y :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$ ($R > 0$) dont l'expression analytique est de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où les coefficients a_n sont réels. Montrer que y est solution de (E_2) sur $] -R, R[$ si, et seulement si, $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 2$, $n^2 a_n = a_{n-2}$.

- b) En déduire les expressions de a_{2p} et de a_{2p+1} en fonction de $p \in \mathbb{N}$. Les réponses feront intervenir des factorielles.

- c) Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et en déduire toutes les solutions de (E_2) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

Q4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \int_0^\pi e^{x \sin t} dt$.

- a) Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation sous le signe intégral.
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pourra commencer par considérer la restriction de f à l'intervalle $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif.
- c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q5. Montrer que f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. Indication : on pourra effectuer une intégration par parties sur l'intégrale obtenue à partir de l'expression $xf''(x) - xf(x)$.

Q6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^\pi \sin^n t dt$.

- a) Rappeler l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme (pour une série de fonctions).

- b)** En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide des nombres W_n .
- c)** En utilisant les résultats de la question 3, donner l'expression des intégrales W_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (la réponse distinguera deux cas selon la parité de n).

